Datrysiadau i Daflen Problemau 5

1. Mae cwmni past dannedd yn gallu creu dwy fath o bast dannedd:
   - 'Dant Pendant': past dannedd rhatach sy'n gwneud elw o £1000 y dunnell, a
   - 'Gwenau Gwyn': past dannedd premiwm sy'n gwneud elw o £8000 y dunnell.

   Mae angen mewnforio dau gynhwysyn, felly mae cyfyngiadau ar eu defnydd dyddiol: ond 12kg o Galsiwm Carbonad sydd ar gael pob dydd, ac ond 24kg o Sodiwm Fflworid sydd ar gael pob dydd.
   - Mae pob tunnell o 'Dant Pendant' angen 3kg o Sodiwm Fflworid ac 1kg o Galsiwm Carbonad.
   - Mae pob tunnell o 'Gwenau Gwyn' angen 1kg o Sodiwm Fflworid ac 2kg o Galsiwm Carbonad.

   Hefyd, er mwyn sicrhau bod yna digon o bast dannedd rhatach ar gael i'r boblogaeth, mae'r llywodraeth wedi deddfu ni all y cwmni cynhyrchu mwy na 2 tunnell yn rhagor o'r past dannedd premiwm na'r past dannedd rhatach pob dydd.

   (a) Gan ddefnyddio'r dull graffigol, faint o dunelli o bob past dannedd dylai'r cwmni cynhyrchu pob dydd er mwyn uchafsymio'i elw dyddiol?

   (b) Os yw'r llywodraeth nawr yn deddfu bod y cwmni ond yn gallu gwneud £1600 o elw ar gyfer pob tunnell o 'Gwenau Gwyn', faint o dunelli o bob past dannedd dylai'r cwmni cynhyrchu pob dydd nawr er mwyn uchafsymio'i elw dyddiol?

Datrysiad 1 *Gadewch i S bod y nifer o dunelli o 'Dant Pendant' ac W bod y nifer o dunelli o 'Gwenau Gwyn'. Yna:*

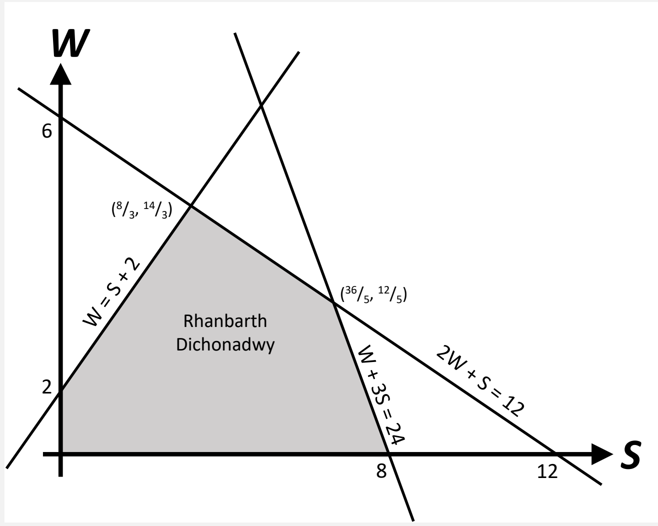
Uchafsymio:

$$800W + 100S$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} W + 3S &\leq 24 \\ 2W + S &\leq 12 \\ B &\leq A + 2 \\ W, S &\geq 0 \end{aligned}$$

Datrysiad 1 (continuing from p. 1) *Caiff hyn ei dynnu fel:*



(a) *Pan taw'r ffwythiant amcan yw £8000 W + £1000 S:*

Pwynt	*Amcan* $= 8000W + 1000S$
$(0, 0)$	0
$(0, 2)$	$16,000$
$(8, 0)$	$8,000$
$(^8/_3, {^{14}/_3})$	$40,000$
$(^{36}/_5, {^{12}/_5})$	$26,400$

Felly $W = {^{14}/_3}$ *ac* $S = {^8/_3}$.

(b) *Pan taw'r ffwythiant amcan yw £1600 W + £1000 S:*

Pwynt	*Amcan* $= 1600W + 1000S$
$(0, 0)$	0
$(0, 2)$	$3,200$
$(8, 0)$	$8,000$
$(^8/_3, {^{14}/_3})$	$10,133.33$
$(^{36}/_5, {^{12}/_5})$	$11,040$

Felly $W = {^{12}/_5}$ *ac* $S = {^{36}/_5}$.

2. Defnyddiwch y dull Simplecs er mwyn datrys y broblem rhaglennu llinol canlynol:

Uchafsymio:

$$3x_1 + 5x_2$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} -5x_1 + 17x_2 &\le 425 \\ 5x_1 + 4x_2 &\le 205 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Datrysiad 2 *Yn ysgrifennu i lawr y tablo Simplecs cychwynnol:*

	x_1	x_2	s_1	s_2
425	-5	17	1	0
205	5	4	0	1
0	-3	-5	0	0

Gan ddewis 17 fel y colyn, perfformiwn $\bar{r}_1 = \frac{1}{17}r_1$, $r_2 = r_2 - 4\bar{r}_1$, *ac* $r_3 = r_3 + 5\bar{r}_1$:

	x_1	x_2	s_1	s_2
25	$-{}^{5}/_{17}$	1	${}^{1}/_{17}$	0
105	${}^{105}/_{17}$	0	$-{}^{4}/_{17}$	1
125	$-{}^{76}/_{17}$	0	${}^{5}/_{17}$	0

Yn dewis ${}^{105}/_{17}$ *fel y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_2 = \frac{17}{105}r_2$, $r_1 = r_1 + \frac{5}{17}\bar{r}_2$, *ac* $r_3 = r_3 + \frac{76}{17}\bar{r}_1$:

	x_1	x_2	s_1	s_2
30	0	1	${}^{1}/_{21}$	${}^{1}/_{21}$
17	1	0	$-{}^{4}/_{105}$	${}^{17}/_{105}$
201	0	0	${}^{13}/_{105}$	${}^{76}/_{105}$

Yn rhoi datrysiad o $x_1 = 17$, $x_2 = 30$, *a gwerth ffwythiant amcan uchaf o* $3x_1 + 5x_2 = 201$.

3. Ystyriwch y broblem rhaglennu llinol canlynol:

Uchafsymio:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 17 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 6 \\ 2x_2 + 3x_3 &\leq 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Defnyddiwch y dull Simplecs er mwyn canfod un datrysiad gorau posib.

(b) Colynnwch unwaith yn rhagor er mwyn canfod yr holl ddatrysiadau gorau posib. Rhowch eich ateb yn y ffurf $\{(1-t)\underline{\mathbf{a}} + t\underline{\mathbf{b}}$ ar gyfer pob $t \in [0,1]\}$.

(c) Os sefydlwn $x_3 = 1$, canfyddwch y gerthoedd sydd rhaid i x_1 ac x_2 cymryd er mwyn i'r datrysiad aros yn un gorau posib.

Datrysiad 3 *Mae gennym:*

(a) Ysgrifennu i lawr y tablo Simplecs cychwynnol:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
17	1	-1	4	1	0	0
6	2	0	1	0	1	0
14	0	2	3	0	0	1
0	-3	-1	-3	0	0	0

Gan ddewis 2 i fod y colyn, perfformiwn $\bar{r}_2 = \frac{1}{2}r_2$, $r_1 = r_1 - \bar{r}_2$, $r_3 = r_3$, *ac* $r_4 = r_4 + 3\bar{r}_2$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
14	0	-1	$7/2$	1	$-1/2$	0
3	1	0	$1/2$	0	$1/2$	0
14	0	2	3	0	0	1
9	0	-1	$-3/2$	0	$3/2$	0

Gan ddewis $7/2$ *i fod y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_1 = \frac{2}{7}r_1$, $r_2 = r_2 - \frac{1}{2}\bar{r}_1$, $r_3 = r_3 - 3\bar{r}_1$, *ac* $r_4 = r_4 + \frac{3}{2}\bar{r}_1$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
4	0	$-2/7$	1	$2/7$	$-1/7$	0
1	1	$1/7$	0	$-1/7$	$4/7$	0
2	0	$20/7$	0	$-6/7$	$-3/7$	1
15	0	$-10/7$	0	$3/7$	$9/7$	0

Gan ddewis $20/7$ *i fod y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_3 = \frac{7}{20}r_3$, $r_1 = r_1 - \frac{1}{10}r_3$, $r_2 = r_2 - \frac{1}{20}r_3$, *ac* $r_4 = r_4 + \frac{1}{2}r_3$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$21/5$	0	0	1	$1/5$	$-13/70$	$1/10$
$9/10$	1	0	0	$-1/10$	$11/20$	$-1/20$
$7/10$	0	1	0	$-3/10$	$-3/20$	$-7/20$
16	0	0	0	0	$15/14$	$1/2$

Ac felly'r datrysiad gorau posib yw $x_1 = 9/10$, $x_2 = 7/10$, *ac* $x_3 = 21/5$, *yn rhoi gwerth ffwythiant amcan o 16.*

(b) Gan fod yna newidyn ansylfaenol gyda sero yn y rhes amcan (s_1)*, colynnwn unwaith yn rhagor ar* $1/5$*. Gan ddewis* $\bar{r}_1 = 5r_1$, $r_2 = r_2 + \frac{1}{2}r_1$, $r_3 = r_3 + \frac{3}{2}r_1$, *ac* $r_4 = r_4$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
21	0	0	5	1	$-13/14$	$1/2$
3	1	0	$1/2$	0	$5/28$	$3/20$
7	0	1	$3/2$	0	$-13/14$	$1/2$
16	0	0	0	0	$15/14$	$1/2$

Ac felly datrysiad gorau posib arall yw $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, *ac* $x_3 = 21$.

Yna ysgrifennwn i lawr yr holl ddatrysiadau gorau posib yn y ffurf:

$$\left\{(1-t)\left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{21}{5}\right) + t\,(3, 7, 0) \quad \text{ar gyfer holl } \; t \in [0,1]\right\}$$

Datrysiad 3 (continuing from p. 4) *(c) Mae sefydlogi $x_3 = 1$ yn cyfateb i osod $t = {}^{16}\!/_{21}$, mae hwn yn rhoi:*

$$
\begin{aligned}
x_1, x_2, x_3 &= \left(1 - \frac{16}{21}\right)\left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{21}{5}\right) + \frac{16}{21}(3, 7, 0) \\
x_1, x_2, x_3 &= \frac{5}{21}\left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{21}{5}\right) + \frac{16}{21}(3, 7, 0) \\
&= \left(\frac{45}{210}, \frac{35}{210}, 1\right) + \left(\frac{48}{21}, \frac{112}{21}, 0\right) \\
&= \left(\frac{525}{210}, \frac{1155}{210}, 1\right) \\
&= \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 1\right)
\end{aligned}
$$

Ac felly'r datrysiad gorau posib nawr fydd $x_1 = {}^5\!/_2$, $x_2 = {}^{11}\!/_2$, ac $x_3 = 1$.

4. Datryswch y broblem rhaglennu llinol canlynol gan ddefnyddio'r dull dwy-gam:

Uchafsymio:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

yn amodol ar

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 15 \\
x_1 + x_2 - x_3 &\geq 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Datrysiad 4 *Trwy ail-ysgrifennu'r cyfyngiadau gan ddefnyddio newidynnau llac, cawn:*

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 &= 10 \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + s_2 &= 15 \\
x_1 + x_2 - x_3 - s_3 + a_1 &= 4
\end{aligned}
$$

ac felly'r cam gyntaf yw lleiafsymio $a_1 - 4 = -x_1 - x_2 + x_3 + s_3$.

Datrysiad 4 (continuing from p. 5) *Mae ysgrifennu'r tablo yn rhoi:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
10	3	2	1	1	0	0	0
15	2	3	3	0	1	0	0
4	1	1	-1	0	0	-1	1
0	-2	-3	-4	0	0	0	0
-4	-1	-1	1	0	0	1	0

Gan ddewis 3 *fel y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_1 = \frac{1}{3}r_1$, $r_2 = r_2 - 2\bar{r}_1$, $r_3 = r_3 - \bar{r}_1$, $r_4 = r_4 + 2\bar{r}_1$, *ac* $r_5 = r_5 + \bar{r}_1$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
$10/3$	1	$2/3$	$1/3$	$1/3$	0	0	0
$25/3$	0	$5/3$	$7/3$	$-2/3$	1	0	0
$2/3$	0	$1/3$	$-4/3$	$-1/3$	0	-1	1
$20/3$	0	$-5/3$	$-10/3$	$2/3$	0	0	0
$-2/3$	0	$-1/3$	$4/3$	$1/3$	0	1	0

Gan ddewis $1/3$ *fel y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_3 = 3r_3$, $r_1 = r_1 - 2r_3$, $r_2 = r_2 - 5r_3$, $r_4 = r_4 + 5r_3$, *ac* $r_5 = r_5 + r_3$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1
2	1	0	3	1	0	2	-2
5	0	0	9	1	1	5	-5
2	0	1	-4	-1	0	-3	3
10	0	0	-10	-1	0	-5	5
0	0	0	0	0	0	0	1

Mae hwn yn gorffen y cam cyntaf. Mae dileu'r colofnau a rhesi priodol yn rhoi:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
2	1	0	3	1	0	2
5	0	0	9	1	1	5
2	0	1	-4	-1	0	-3
10	0	0	-10	-1	0	-5

Gan ddewis 9 *fel y colyn, perfformiwn* $\bar{r}_2 = \frac{1}{9}r_2$, $r_1 = r_1 - 3\bar{r}_2$, $r_3 = r_3 + 4\bar{r}_2$, *ac* $r_4 = r_4 + 10\bar{r}_2$*:*

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$1/3$	1	0	0	$2/3$	$-1/3$	$1/3$
$5/9$	0	0	1	$1/9$	$1/9$	$5/9$
$38/9$	0	1	0	$-5/9$	$4/9$	$-7/9$
$140/9$	0	0	0	$1/9$	$10/9$	$5/9$

Ac felly'r datrysiad gorau posib yw $x_1 = 1/3$, $x_2 = 38/9$, *ac* $x_3 = 5/9$, *yn rhoi gwerth ffwythiant amcan uchaf o* $140/9$.

5. Mae Prifysgol Caerdydd angen creu ei amserlen arholiadau. Mae ganddo set M o arholiadau (wedi'u indecsio gan m) sydd angen eu hamserlennu. Ar gyfer pob pâr o arholiadau i, j, mae ganddo ddangosydd C_{ij} sydd wedi'i setio i 1 os nad yw'r modiwlau yn gallu cael eu hamserlennu ar yr un pryd (gan ei fod yn rhannu myfyrwyr), a 0 os allen nhw gael ei hamserlennu ar yr un pryd. Gadewch i T bod y set o slotiau amser sydd ar gael, wedi'u indecsio gan t. Fformiwleiddiwch broblem rhaglennu llinol sy'n canfod amserlen ddichonadwy sy'n defnyddio'r nifer lleiaf o slotiau amser.

   Does dim ofyn i chi datrys y broblem rhaglennu llinol!

Datrysiad 5 *Diffiniwn X_{mt} fel newidyn deuaidd yn dynodi os yw modiwl $m \in M$ wedi'i amserlennu ar amser $t \in T$. Diffiniwn Y_t fel y newidyn deuaidd sy'n dynodi os oes yna arholiad ar amser $t \in T$. Yna un fformiwleiddiad posib fydd:*

Lleiafsymio:

$$\sum_{t \in T} Y_t$$

yn amodol ar

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in T} X_{mt} &= 1 \; \forall \; m \in M \\
|M| Y_t &\geq \sum_{m \in M} X_{mt} \; \forall \; t \in T \\
C_{ij} \left(X_{it} + X_{jt} \right) &\leq 1 \; \forall \; t \in T \; \forall \; i, j \in M \\
X_{mt}, Y_t & \text{ yn deuaidd } \forall \; t \in T \; \forall \; m \in M
\end{aligned}$$